1 Définitions et conventions

Une **matrice** (m, n) d'éléments réels est un tableau rectangulaire constitué de m lignes et n colonnes dont les éléments sont des nombres réels $(m, n \in \mathbb{N}_0)$.
On compte les lignes de gauche à droite et les lignes de haut en bas.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & 42 & \frac{27}{4} \\ -4 & 3.2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

On désigne le plus souvent une matrice par une lettre majuscule. L'élément de la matrice $\mathcal{A}$ placé à la ligne i et à la colonne j est noté a_{ij}. Par exemple, dans la matrice ci-dessus, $a_{21} = -4$. Les dimensions d'une matrice (nombres de lignes et de colonnes) peuvent être notées en bas à droite de celle-ci ; dans ce cas 2×3.

Exercices : Donner les dimensions des matrices suivantes :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 12 & -7 & 45 \\ 9 & 67 & 87 & 22 \\ 1 & 3 & 2 & 41 \\ 2 & 36 & 21 & 0 \\ 0 & 1 & -65 & 3.1415 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercices : A partir des matrices ci-dessus, est-il vrai ou faux que :

$a_{12} = 21$
$b_{21} = 6$
$b_{61} = b_{54}$
$b_{23} = 67$
$c_{13} = 5$

2 Opérations matricielles

2.1 Addition - Soustraction

Deux matrices de même dimension peuvent s'additionner, ou se soustraire. Pour ce faire, il s'agit d'appliquer l'addition, ou la soustraction, élément par élément. Ainsi, $\mathcal{A} + \mathcal{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ et $\mathcal{A} - \mathcal{B} = [a_{ij} - b_{ij}]$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+3 & 5+(-2) \\ 2+4 & 11+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

Exercices : Effectuer les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3.1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication - Division par un scalaire

Une matrice peut être multipliée par un nombre réel. Pour se faire, on multiplie chacun de ses éléments par le scalaire. Ainsi, $\alpha\mathcal{A} = [\alpha a_{ij}]$.

$$4.\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 20 \\ 8 & 44 \end{pmatrix}$$

Exercices : Effectuer les opérations suivantes :

$$-2.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 10.5 & -1 \\ 24 & 21 \end{pmatrix}$$

2.3 Transposition matricielle

La transposée de $\mathcal{A}(m,n)$ est la matrice notée $\mathcal{A}^T$ telle que $\mathcal{A}^T = [a_{ji}]$. Ce qui revient à intervertir les lignes et les colonnes.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercices : Effectuer les transpositions suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}^T \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}^T$$

2.4 Multiplication de deux matrices

Le produit de $\mathcal{A}(m,p)$ par $\mathcal{B}(p,n)$ est la matrice $\mathcal{C}(m,n)$ définie comme suit : chaque élément c_{ij} est le produit de la i^e ligne de $\mathcal{A}$ par la j^e colonne de $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1).1 + 2.(-2) & (-1).3 + 2.0 & (-1).8 + 2.4 & (-1).(-1) + 2.3 \\ 5.1 + 3.(-2) & 5.3 + 3.0 & 5.8 + 3.4 & 5.(-1) + 3.3 \\ 2.1 + 1.(-2) & 2.3 + 1.0 & 2.8 + 1.4 & 2.(-1) + 1.3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & 7 \\ -1 & 15 & 52 & 4 \\ 0 & 6 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention :

- Le produit $\mathcal{AB}$ n'est défini que si le nombre de colonnes de $\mathcal{A}$ est égal au nombre de lignes de $\mathcal{B}$.
- En général $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$

3 Déterminant d'une matrice carrée

Le **déterminant** d'une matrice carrée $\mathcal{A}$ d'ordre n ($\mathcal{A}(n, n)$) est un nombre associé à cette matrice, qui se calcule comme ceci :

si $n = 1$ $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ et dét$\mathcal{A} = a_{11}$

si $n = 2$ $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et dét$\mathcal{A} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$

si $n \geq 3$ Le calcul du déterminant fait intervenir deux autres notions : le *mineur* et le *cofacteur*

Le **mineur** de l'élément a_{ij} de $\mathcal{A}$, noté M_{ij}, est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de $\mathcal{A}$.

Le **cofacteur** de l'élément a_{ij} de $\mathcal{A}$, noté C_{ij}, vaut $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Soit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

- le mineur de $a_{12} = M_{12} =$ dét$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ = 4.9 - 7.6 = -6.
- le cofacteur de $a_{12} = C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 6$.

Le **déterminant** d'une matrice carrée $\mathcal{A}$ d'ordre n se calcule comme ceci : après avoir choisi une ligne, ou une colonne, de $\mathcal{A}$, on calcule la somme des produits des éléments de cette ligne, ou colonne, par leur cofacteur.

Soit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on peut calculer son déterminant de diverses manières :

Choix de la première ligne :

$$\begin{aligned}
\text{dét}\mathcal{A} &= a_{11}.(-1)^{1+1}.M_{11} + a_{12}.(-1)^{1+2}.M_{12} + a_{13}.(-1)^{1+3}.M_{13} \\
&= 1.(-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 2.(-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3.(-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= 1.1.(-3) + 2.(-1).(-6) + 3.1. - 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Choix de la deuxième colonne :

$$\begin{aligned}
\text{dét}\mathcal{A} &= a_{12}.(-1)^{1+2}.M_{12} + a_{22}.(-1)^{2+2}.M_{22} + a_{32}.(-1)^{3+2}.M_{32} \\
&= 2.(-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 5.(-1)^{2+2} det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 8.(-1)^{3+2} det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 2.(-1).(-6) + 5.1.(-12) + 8.(-1).(-6) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercices : Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Inverse d'une matrice carrée

L'**inverse** de la matrice $\mathcal{A}$, notée $\mathcal{A}^{-1}$ est définie comme le produit de $\frac{1}{dt\mathcal{A}}$ par la matrice des cofacteurs transposée. $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}} [C_{ij}]^T$

Soit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Attention :

- $\mathcal{A}$ admet une inverse si et seulement si dét$\mathcal{A} \neq 0$.
- $\mathcal{A}.\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}.\mathcal{A} = I$, la matrice identité qui n'a que des 1 sur la diagonales et dont les autres éléments sont nuls. $I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 Solutions des exercices

1. Dimensions

   $\mathcal{A}_{2\times 2}$, $\mathcal{B}_{6\times 4}$ et $\mathcal{C}_{2\times 7}$.

2. Eléments

   $a_{12} = 21$, $b_{21} = 4$, $b_{61} = 0 = b_{54}$, $b_{23} = -7$ et $c_{13} = 5$.

3. Addition - Soustraction

   $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1.5 & 6.1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} =$ opération impossible, les matrices n'ont pas la même dimension.

4. Multiplication - Division par un scalaire
$$-2.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 14 & -8 & -4 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 10.5 & -1 \\ 24 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & \frac{-1}{7} \\ \frac{24}{7} & 3 \end{pmatrix}$$
5. Transposition
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
6. Déterminant
$det(\mathcal{A}) = -14$, $det(\mathcal{B}) = -66$ et $det(\mathcal{C}) = -62$.