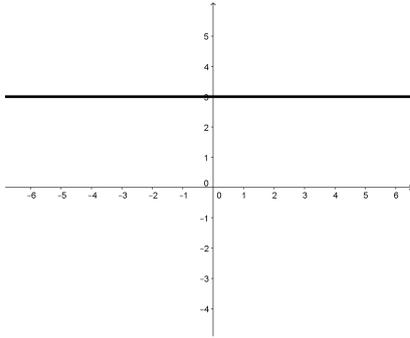


# Table des matières

<b>1 Fonctions usuelles</b>	<b>2</b>
1.1 La fonction $f(x) = k(k \neq 0)$	2
1.2 La fonction $f(x) = x$	2
1.3 La fonction $f(x) = x^2$	2
1.4 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$	2
1.5 La fonction $f(x) = x^3$	3
1.6 La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$	3
1.7 La fonction $f(x) = e^x$	3
1.8 La fonction $f(x) = \ln(x)$	3
1.9 La fonction $f(x) = \sin(x)$	4
1.10 La fonction $f(x) = \cos(x)$	4
1.11 La fonction $f(x) = \tan(x)$	4
<b>2 Les dérivées</b>	<b>5</b>
2.1 Formules de dérivation	5
2.2 Exercices résolus	5
2.3 Exercices	6
2.3.1 Solutions	7
<b>3 Les intégrales</b>	<b>8</b>
3.1 Formules d'intégration immédiate	8
3.2 Techniques d'intégration	8
3.2.1 Par parties	8
3.2.2 Par substitution / changement de variable	8
3.3 Exercices résolus	8
3.4 Exercices	9
3.4.1 Solutions	10

# 1 Fonctions usuelles

## 1.1 La fonction $f(x) = k (k \neq 0)$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

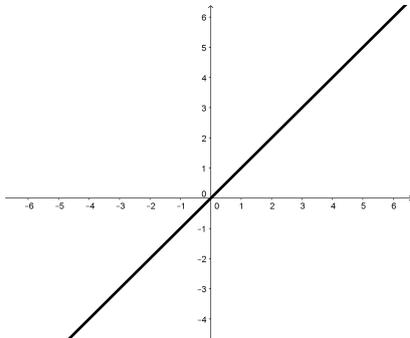
$$Im_f = \{k\}$$

Points à repérer :  $(0; k)$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = 0$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = kx + C$$

## 1.2 La fonction $f(x) = x$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

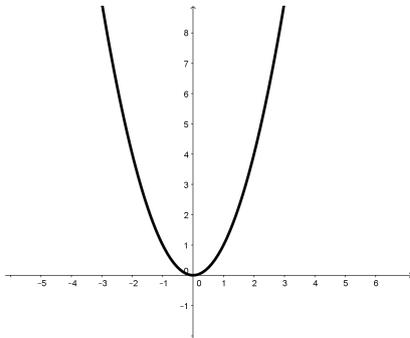
$$Im_f = \mathbb{R}$$

Points à repérer :  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(-1; -1)$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = 1$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = x + C$$

## 1.3 La fonction $f(x) = x^2$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

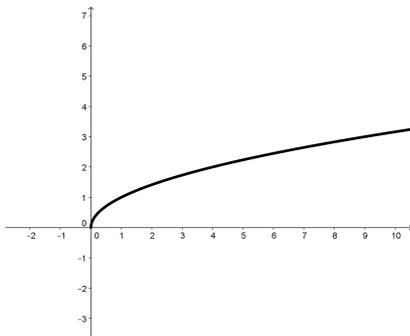
$$Im_f = \mathbb{R}^+$$

Points à repérer :  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(2; 4)$ ,  $(-2; 4)$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = 2x$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + C$$

## 1.4 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$



$$Dom_f = \mathbb{R}^+$$

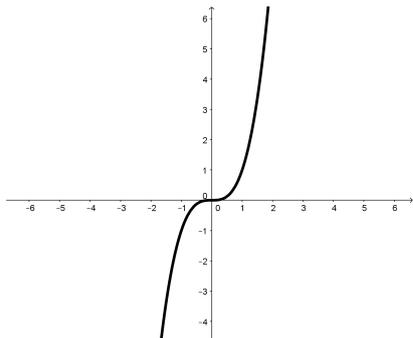
$$Im_f = \mathbb{R}^+$$

Points à repérer :  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(4; 2)$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = \int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

### 1.5 La fonction $f(x) = x^3$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

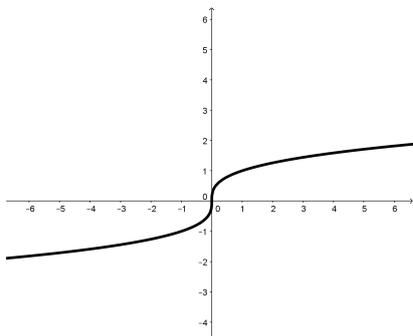
$$Im_f = \mathbb{R}$$

Points à repérer : (0; 0), (1; 1), (-1; -1)

$$\text{Dérivée : } f'(x) = 3x^2$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = \frac{x^4}{4} + C$$

### 1.6 La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

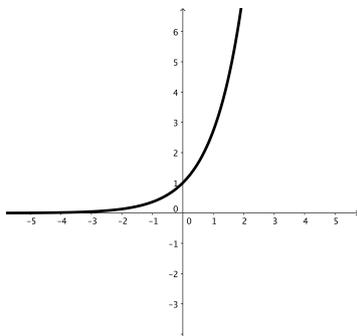
$$Im_f = \mathbb{R}$$

Points à repérer : (0; 0), (1; 1), (-1; -1)

$$\text{Dérivée : } f'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = \int x^{1/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

### 1.7 La fonction $f(x) = e^x$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

$$Im_f = \mathbb{R}^+$$

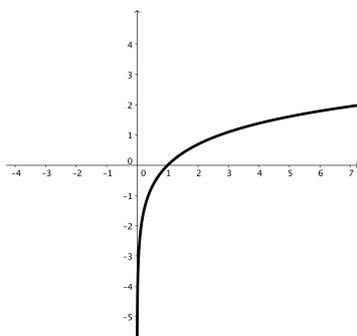
Points à repérer : (0; 1), (1; e)

Asymptote :  $AH_g \equiv y = 0$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = e^x$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = e^x + C$$

### 1.8 La fonction $f(x) = \ln(x)$



$$Dom_f = \mathbb{R}^+$$

$$Im_f = \mathbb{R}$$

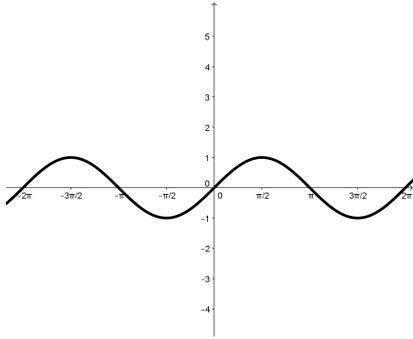
Points à repérer : (1; 0)

Asymptote :  $AV \equiv x = 0$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

### 1.9 La fonction $f(x) = \sin(x)$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

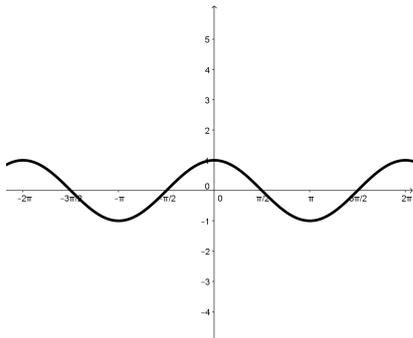
$$Im_f = [-1; 1]$$

Points à repérer :  $(0; 0)$ , racines en  $x = k.\pi$  pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = \cos(x)$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = -\cos(x) + C$$

### 1.10 La fonction $f(x) = \cos(x)$



$$Dom_f = \mathbb{R}$$

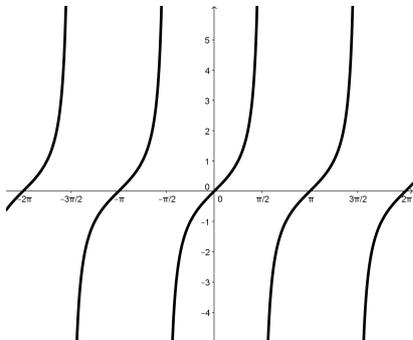
$$Im_f = [-1; 1]$$

Points à repérer :  $(0; 1)$ , racines en  $x = k.\frac{\pi}{2}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dérivée : } f'(x)dx = -\sin(x)$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = \sin(x) + C$$

### 1.11 La fonction $f(x) = \tan(x)$



$$Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{k.\frac{\pi}{2}\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$Im_f = \mathbb{R}$$

Points à repérer :  $(0; 0)$ , racines en  $x = k.\pi$  pour  $k \in \mathbb{Z}$

Asymptote :  $AV \equiv x = k.\frac{\pi}{2}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dérivée : } f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\text{Intégrale : } \int f(x)dx = -\ln |\cos(x)| + C$$

## 2 Les dérivées

### 2.1 Formules de dérivation

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### 2.2 Exercices résolus

$$\bullet (x^3)' = 3x^2$$

$$\begin{aligned}\bullet ((x+3)^3)' &= 3(x+3)^2 \cdot (x+3)' \\ &= 3(x+3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet ((4x+3)^3)' &= 3(4x+3)^2 \cdot (4x+3)' \\ &= 3(4x+3)^2 \cdot 4 \\ &= 12(4x+3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet (6x^3)' &= 6(x^3)' \\ &= 6 \cdot 3x^2 \\ &= 18x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet ((x^3) \cdot \sin(x))' &= (x^3)' \cdot \sin(x) + x^3 \cdot (\sin(x))' \\ &= 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \left(\frac{x^3}{2x+1}\right)' &= \frac{(x^3)' \cdot (2x+1) - x^3 \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (2x+1) - x^3 \cdot 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 3x^2}{(2x+1)^2}\end{aligned}$$

## 2.3 Exercices

1.  $y = \sqrt{1-x^4}$
2.  $y = e^{x^2}$
3.  $y = (x+3)^3$
4.  $y = \ln(x+3)^2$
5.  $y = \sin^2 2x$
6.  $y = x^2 + 6x + 3$
7.  $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
8.  $y = x^5 - 5x^4 - 10x^2 + 6$
9.  $y = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$
10.  $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$
11.  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
12.  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
13.  $y = \sqrt{3+4x-x^2}$
14.  $y = 2x^2\sqrt{2-x}$
15.  $y = \sin^{-2} 2x$
16.  $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$
17.  $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$
18.  $y = a^x \cdot x^a$
19.  $y = \operatorname{tg}(x^2)$
20.  $y = \operatorname{tg}^2 x$
21.  $y = (x^2 + 3)^4 (2x^3 - 5)^3$
22.  $y = (3x - 2)\sqrt{(3x+1)^3}$
23.  $y = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2-1} - x}$
24.  $y = \sin \sqrt{x}$
25.  $y = \frac{1 + \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)}$
26.  $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$
27.  $y = \ln \frac{\cos^2 x}{1-4x}$
28.  $y = \left( \frac{x^2 - 4}{4x^2 + 3x - 1} \right)^5$
29.  $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$
30.  $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$
31.  $y = x^4 \ln(\sin(x))$
32.  $y = \ln(\ln(x))$
33.  $y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$
34.  $y = \ln((x^3 + 2) \cdot (x^2 + 3))$
35.  $y = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$
36.  $y = \ln(\sin(3x))$
37.  $y = e^{-2x} \ln(4x)$
38.  $y = x^2 \cdot 4^x$
39.  $y = \ln(x^e)$

### 2.3.1 Solutions

1.  $\frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$
2.  $2x.e^{x^2}$
3.  $3(x+3)^2$
4.  $\frac{2}{x+3}$
5.  $2.\sin(4x)$
6.  $2x+6$
7.  $-\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$
8.  $5x(x^3-4x^2-4)$
9.  $\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$
10.  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$
11.  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$
12.  $-\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$
13.  $\frac{2-x}{\sqrt{3+4x-x^2}}$
14.  $\frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$
15.  $-\frac{4\cot(2x)}{\sin^2(2x)}$
16.  $\frac{-2}{1-x^2}$
17.  $\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$
18.  $a^x x^{a-1}(x \ln a + a)$
19.  $\frac{2x}{\cos^2 x^2}$
20.  $2\frac{\tan x}{\cos^2 x}$
21.  $2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$
22.  $\frac{3}{2}(3x+1)^{1/2}(15x-4)$
23.  $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2-1}-x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$
24.  $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
25.  $\frac{2}{(\cos x - \sin x)^2}$
26.  $\sin x.\cos^2 x.(-3\sin^2 x + 2\cos^2 x)$
27.  $\frac{-2\sin x.(1-4x)+4\cos x}{(1-4x)\cos x}$
28.  $15\frac{(x^2-4)^4}{(4x^2+3x-1)^6}(x^2+10x+4)$
29.  $\frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$
30.  $\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2)^2}}+\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{(5x)^3}}$
31.  $4x^3 \ln \sin x + x^4 \cot x$
32.  $\frac{1}{x \ln x}$
33.  $\frac{4a}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$
34.  $\frac{5x^4 + 9x^2 + 4x}{(x^3 + 2).(x^2 + 3)}$
35.  $x \sin x$
36.  $3 \cot 3x$
37.  $e^{-2x}\left(\frac{1}{x} - 2 \ln 4x\right)$
38.  $x.4^x(2+x \ln 4)$
39.  $\frac{e}{x}$

### 3 Les intégrales

#### 3.1 Formules d'intégration immédiate

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Si  $f'(x) = F(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

#### 3.2 Techniques d'intégration

##### 3.2.1 Par parties

$$\int f(x).g'(x) dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x) dx$$

##### 3.2.2 Par substitution / changement de variable

$$\int f(g(x)).g'(x) dx = \int f(t) dt \text{ avec } \begin{cases} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{cases}$$

#### 3.3 Exercices résolus

$$\begin{aligned} \bullet \int x^2 + \cos(x) dx &= \int x^2 dx + \int \cos(x) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \sin(x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \ln(x) dx &= \int \ln(x).1 dx \\ &= \ln(x).x - \int 1 dx \text{ par parties, avec } (\ln(x))' = \frac{1}{x} \text{ et } \int x dx = \frac{x^2}{2} \\ &= x.\ln(x) - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{2x}{x^2+5} dx &= \int \frac{1}{t} dt \text{ par substitution, avec } t = x^2 + 5 \text{ et } dt = 2x dx \\ &= \ln(t) + C \\ &= \ln(x^2 + 5) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^5 \frac{2x}{x^2+5} dx &= [\ln(x^2 + 5)]_1^5 \text{ par l'exemple précédent} \\ &= \ln(5^2 + 5) - \ln((1)^2 + 5) \\ &= \ln(30) - \ln(6) = \ln\left(\frac{30}{6}\right) = \ln(5) \end{aligned}$$

### 3.4 Exercices

1.  $\int \frac{dx}{x^3} = ?$
2.  $\int (1-x^3)^2 dx = ?$
3.  $\int \sqrt{2-3x} dx = ?$
4.  $\int x.e^{-3x} dx = ?$
5.  $\int \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = ?$
6.  $\int e^{4x} dx = ?$
7.  $\int x.\cos(x).dx = ?$
8.  $\int \frac{dx}{x^2-4} = ?$
9.  $\int (3-2x-x^4)dx = ?$
10.  $\int (2x^2+3)^{\frac{1}{3}} x dx = ?$
11.  $\int (e^x+1)^2 dx = ?$
12.  $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)} dx = ?$
13.  $\int x^2 e^{-3x} dx = ?$
14.  $\int \cos^2(3x) dx = ?$
15.  $\int \frac{(5-4x)}{\sqrt{5x-2x^2+8}} dx = ?$
16.  $\int x.\sin(x) dx = ?$
17.  $\int \sin^3(x) dx = ?$
18.  $\int (e^x+1)^2 e^x dx = ?$
19.  $\int x^2 e^{x^3} dx = ?$
20.  $\int \frac{3x}{x^2+2} dx = ?$
21.  $\int (1-x^3)^2 x^2 dx = ?$
22.  $\int x^2.\ln(x) dx = ?$
23.  $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2} dx = ?$
24.  $\int (1-x^3)^2 x dx = ?$
25.  $\int x^2 \sin(x) dx = ?$
26.  $\int \frac{x-1}{x+1} dx = ?$
27.  $\int \sqrt{1+y^4} y^3 dy = ?$
28.  $\int x\sqrt{1+x} dx = ?$
29.  $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx = ?$
30.  $\int \sin^2 x dx = ?$
31.  $I = \int_6^{12} \frac{1}{x+2} dx = ?$
32.  $I = \int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}} dx = ?$
33.  $I = \int_0^{-2} \sqrt{2-3x} dx = ?$
34.  $I = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = ?$

### 3.4.1 Solutions

NB : Ajouter  $+C$  aux solutions 1 à 30

(P) indique une résolution par parties

1.  $\frac{-1}{2x^2}$
2.  $x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{7}$
3.  $-\frac{2(2-3x)^{3/2}}{9}$
- 4.(P)  $-\frac{(1+3x)}{9}e^{-3x}$
5.  $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2 + 4x^{1/2}$
6.  $\frac{e^{4x}}{4}$
- 7.(P)  $\cos x + x \sin x$
8.  $\frac{\ln(x-2)}{4} - \frac{\ln(x+2)}{4}$
9.  $3x - x^2 - \frac{x^5}{5}$
10.  $\frac{3}{16}(2x^2+3)^{4/3}$
11.  $2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + x$
12.  $\frac{8}{3} \ln|x^3+2|$
13. (P)  $e^{-3x} \left( \frac{-x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right)$
14.  $\frac{x}{2} + \frac{\sin(6x)}{12}$
15.  $2(5x - 2x^2 + 8)^{1/2}$
- 16.(P)  $-x \cos x + \sin x$
17.  $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$
18.  $\frac{e^{3x}}{3} + e^{2x} + e^x + \frac{1}{3}$
19.  $\frac{e^{x^3}}{3}$
20.  $\frac{3}{2} \ln(2+x^2)$
21.  $\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^9}{9}$
- 22.(P)  $\frac{-x^3}{9} + \frac{x^3 \ln x}{3}$
23.  $\frac{x^2}{2} + 2 \ln(2+x)$
24.  $\frac{x^2}{2} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^8}{8}$
- 25.(P)  $(2-x^2) \cos x + 2x \sin x$
26.  $x - 2 \ln(1+x)$
27.  $\frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2}$
28. (P)  $(1+x)^{3/2} \cdot \frac{6x-4}{15} + C$
29.  $(x^2+2x-4)^{1/2}$
30.  $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$
31.  $I = \ln 14 - \ln 8$
32.  $I = 6$
33.  $I = \frac{2^{5/2} - 2^{11/2}}{9}$
34.  $I = 0$