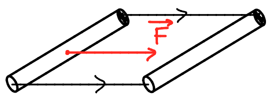
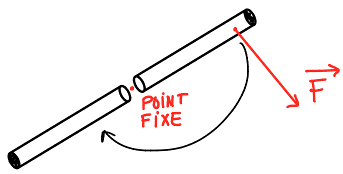
Travailler avec des vecteurs

Intro

Une force cause une translation et/ou une rotation au cours du temps dans une certaine direction et un certain sens.





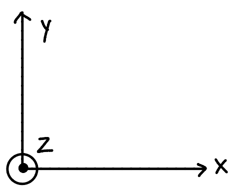
La seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, qui exprime qu'une force crée une accélération, est une relation vectorielle : $\vec{F}$ et $\vec{a}$ sont des vecteurs, des grandeurs représentées par des flèches dans l'espace en 3 dimensions.

Pour faire des calculs avec des valeurs numériques (scalaires), il faut écrire cette même équation avec des grandeurs scalaires : les composantes des vecteurs (= les projections) selon les 3 axes de l'espace. Une équation vectorielle, dans l'espace en 3D, est équivalente à un système de 3 équations scalaires utilisant les composantes des vecteurs. C'est avec elles que l'on travaille pour obtenir des valeurs numériques.

On ne trouvera donc jamais dans une même équation ou ligne de calcul des valeurs numériques et des vecteurs en même temps, donc jamais de $F_1 = 250 + \vec{F_2} + F_{3x}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} F_1 & = & 250 & + & \vec{F_2} & + & F_{3x} \\ scalaire & & scalaire & & vecteur & & scalaire \\ (norme) & & & & & & (composante) \end{array}$$

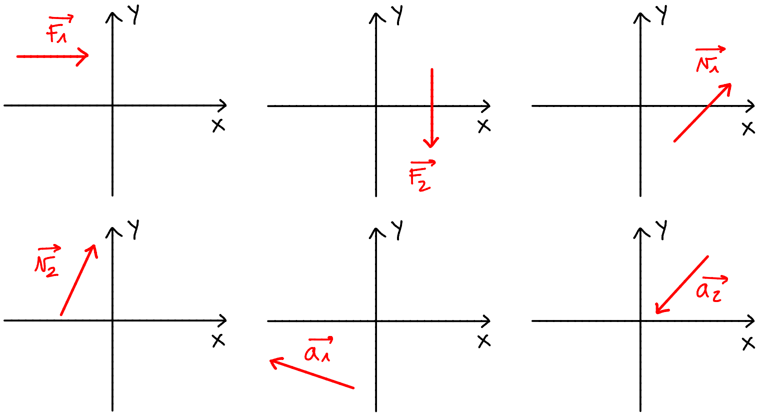
Système d'axes



Le système d'axe le plus couramment utilisé est celui ci-dessus où l'axe des z est un vecteur perpendiculaire à la feuille et qui pointe vers nous (qu'on appelle « vecteur sortant », noté $\odot$). Si l'axe des z allait de nous vers la feuille, on l'appellerait « vecteur rentrant » et il serait noté $\otimes$.

Une composante de vecteur selon un axe exprime si le vecteur va globalement dans la direction et dans le sens de l'axe en question :

— Plus la composante selon un axe est grande (en valeur absolue), plus le vecteur est aligné selon cet axe.
— Si la composante selon l'axe est positive, le vecteur va globalement dans le même sens que l'axe ; si elle est négative, il va dans le sens contraire à l'axe.



Par exemple, $F_{1x} > 0$ et $F_{1y} = 0$; $a_{2x} < 0$ et $a_{2y} < 0$.

Exercice 1 : Déterminer le signe des composantes des 4 autres vecteurs.

Notations

Les composantes d'un vecteur $\vec{v}$ se notent v_x, v_y et v_z. Ce sont des scalaires qui peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

La norme de $\vec{v}$ se note v ou $\|\vec{v}\|$ et est un scalaire toujours positif, qui représente la grandeur de $\vec{v}$, peu importe son orientation selon les axes.

Ne pas confondre les deux et faire attention aux notations, dans les formules du cours mais aussi dans ses propres notes. . .

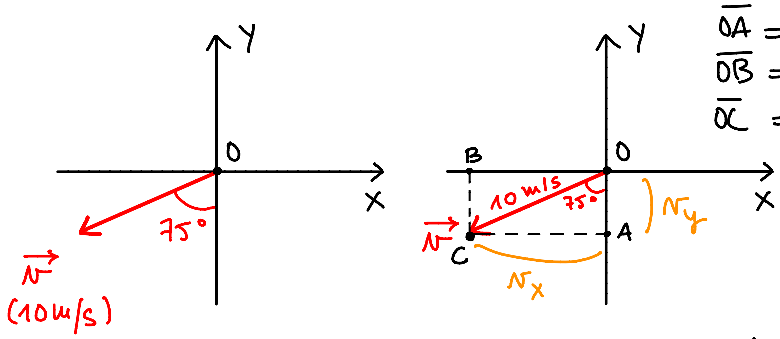
$$\underbrace{v}_{\geqslant 0} \neq \underbrace{v_x}_{> 0 \text{ ou } = 0 \text{ ou } < 0}$$

Calcul des composantes d'un vecteur

Il faut donc pouvoir décomposer des vecteurs dans un système d'axes. Cela se fait en 3 étapes :

1. placer l'origine du système d'axes sur le point d'application du vecteur,
2. déterminer le signe approprié de la composante,
3. utiliser les relations trigonométriques dans les triangles rectangles pour calculer la grandeur de la composante (la longueur d'un côté du triangle, donc une valeur toujours positive).

Exemple : On calcule ici la composante v_y d'un vecteur $\vec{v}$ dont on connaît la norme (10 m/s) et l'angle formé avec la verticale (75°).



$\overline{OA} = |v_y|$
$\overline{OB} = |v_x|$
$\overline{OC} = \|\vec{v}\| = v$

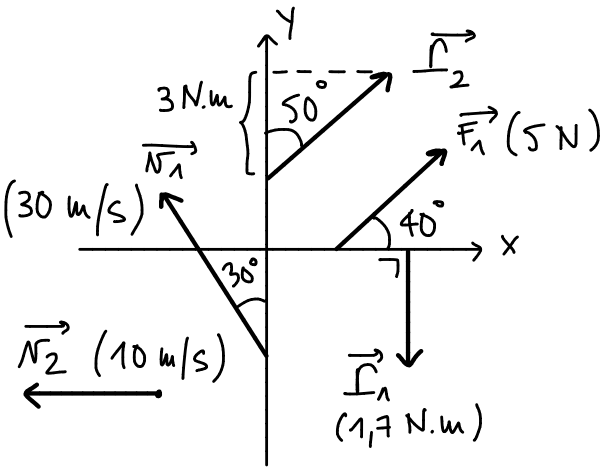
$v_x < 0$ et $v_y < 0$

$$\cos 75° = \frac{|v_y|}{v} = \frac{|v_y|}{10}$$

$$|v_y| = 10 \cos 75°$$

$$v_y = -10 \cos 75° = -2{,}59 \text{ m/s}$$

Exercice 2 : Tracer et calculer les composantes des grandeurs vectorielles suivant les axes donnés.



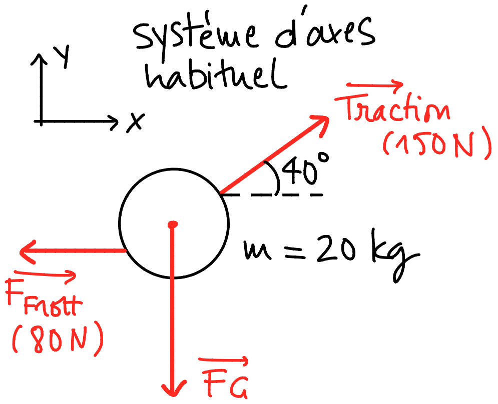
$\vec{v}$ est une vitesse (m/s)
$\vec{F}$ une force (N)
$\vec{\Gamma}$ un moment de force (N.m)

Les valeurs entre parenthèses sont les normes des vecteurs.

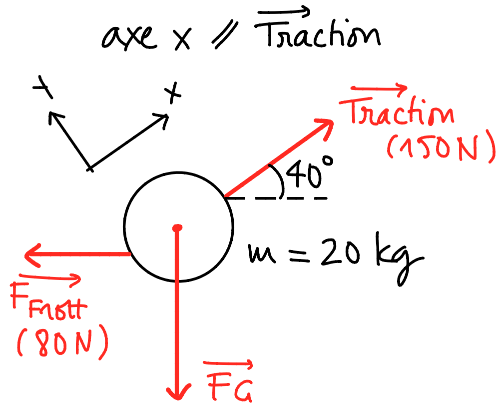
Exercice 3 : Sur les schémas suivants (la situation est la même mais le système d'axe est différent), calculer les composantes de la force totale qui s'applique sur les corps donnés. Calculer ensuite sa norme et donner sa direction.

Pour donner la direction d'un vecteur, il suffit de calculer l'angle qu'il fait avec un des axes, au choix, et de l'indiquer sur le schéma.

(a)



(b)



Exercice 4 : Liste d'exercices supplémentaires (P. Louette — 2008)

Mathématiques – vecteurs

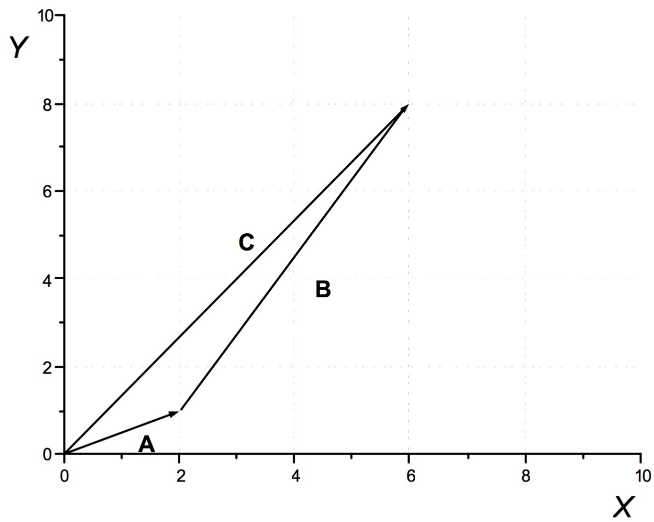
1. Représentez, dans un repère orthonormé, les vecteurs (-2, 4), (5,-1) etc.

2. Quelles sont les composantes scalaires du vecteur $\vec{a}$ de norme 4 et dont l'angle angle θ avec l'axe des abscisses vaut 135° ?

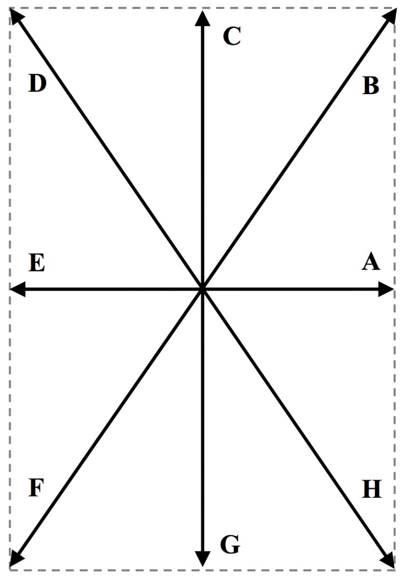
3. Dans la figure ci-dessous, que valent

   (a) les composantes scalaires du vecteur **C**

   (b) la norme du vecteur **C** et l'angle qu'il forme avec l'axe OX ?



4. La figure ci-dessous représente un ensemble de vecteurs qui peuvent être associés de différentes façons. Evaluer : (a) **E + C** , (b) **A + D**, (c) **E + A** , (d) **E + 2A** , (e) **A - B**, (f) **C - A**, *etc...*

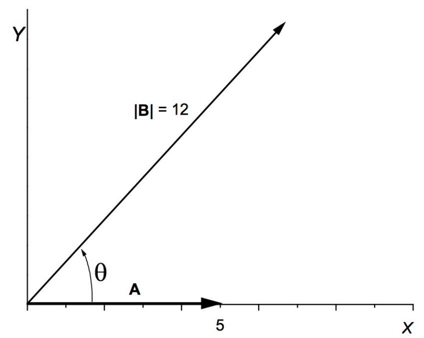


5. Un vecteur a une composante suivant l'axe des X = - 10 et une composante suivant l'axe des Y = + 3.
   a) Dessiner un système d'axes et positionner le vecteur
   b) Calculer la grandeur et la direction de ce vecteur

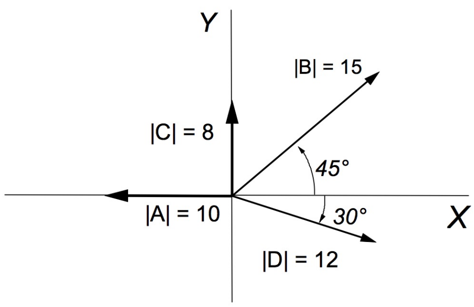
6. Une personne marche 10 km vers le nord, puis elle prend la direction nord-ouest et parcourt 5 km dans cette direction. Quelle sera sa position finale par rapport au point de départ ?

7. Une balle est lancée vers le haut à la vitesse de 30 m s-1, dans une direction faisant un angle de 20° avec l'horizontale. Quelle est la composante horizontale de la vitesse initiale ?

8. Si dans la figure ci-dessous θ vaut 72°, trouver la direction et la grandeur de $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
   (a) à l'aide d'une construction géométrique
   (b) en utilisant les composantes du vecteur



9. A partir des composantes des vecteurs de la figure ci-dessous, trouver la direction et le module du vecteur $\vec{v} = \vec{a} - \vec{c} + \vec{b} - 2\vec{d}$



Solutions

Exercice 1

$F_{2x} = 0$	$v_{1x} > 0$	$v_{2x} > 0$	$a_{1x} < 0$
$F_{2y} < 0$	$v_{1y} > 0$	$v_{2y} > 0$	$a_{1y} > 0$

Exercice 2

$F_{1x} = 3,8$ N	$\Gamma_{1x} = 0$ N.m	$v_{2x} = -10$ m/s	$v_{1x} = -15$ m/s	$\Gamma_{2x} = 3,58$ N.m
$F_{1y} = 3,2$ N	$\Gamma_{1y} = -1,7$ N.m	$v_{2y} = 0$ m/s	$v_{1y} = 25,9$ m/s	$\Gamma_{2y} = 3$ N.m

Exercice 3

(a)	(b)
$F_x = 34,9$ N	$F_x = -37,4$ N
$F_y = -99,8$ N	$F_y = -98,9$ N
$F = 105,7$ N	$F = 105,7$ N
$\theta = 71°$	$\theta = 71°$

où θ est l'angle entre $\vec{F}_{tot}$ et l'horizontale.

Exercice 4

(2)	(3)	(4)	(5)
$a_x = -2\sqrt{2}$	$c_x = 6$	$\vec{E} + \vec{C} = \vec{D}$	$v = 10,44$
$a_y = 2\sqrt{2}$	$c_y = 8$	$\vec{A} + \vec{D} = \vec{C}$	$\theta = 16,7°$
	$c = 10$	$\vec{E} + \vec{A} = \vec{0}$	
	$\theta = 53°$	$\vec{E} + 2\vec{A} = \vec{A}$	
		$\vec{A} - \vec{B} = \vec{G}$	
		$\vec{C} - \vec{A} = \vec{D}$	

(6)	(7)	(8)	(9)
$x = -3,5$ km ouest	$v_x = 28,2$ m/s	$c = 14,4$	$v = 24,9$
$y = 13,5$ km nord		$\theta = 53°$	$\theta = 36°$
$d_{tot} = 14,0$ km			

où θ est l'angle entre le vecteur considéré et l'horizontale.