Table des matières

1 Quelques règles algébriques importantes

1.1 Fractions

1. On ne simplifie *que* ce qui peut être mis en évidence au numérateur *et* au dénominateur :

$$\frac{x^3 - x}{3x^2 - 3x} = \frac{x(x^2-1)}{3x(x-1)} = \frac{x^2-1}{3(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \frac{x+1}{3}$$

2. On ne sépare un fraction en deux *que* si on a une addition ou une soustraction au numérateur.

$$\frac{3x+4}{x-1} = \frac{3x}{x-1} + \frac{4}{x-1} \qquad \text{et pas} \qquad \frac{3x+4}{x-1} = \frac{3x+4}{x} + \frac{3x+4}{-1}$$

3. Diviser une fraction, c'est multiplier par la fraction inverse.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3}.\frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{1}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

1.2 Puissances

1. $x^a.x^b = x^{a+b}$
2. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$

5. $x^a + x^b \neq x^{a+b}$
6. $x^a - x^b \neq x^{a-b}$

1.3 Priorité des opérations

— Les contenus entre parenthèses (ou crochets) sont prioritaires sur les calculs situés en dehors de ces parenthèses.
La barre d'une fraction ou d'une racine carrée joue le rôle d'une parenthèse.

— Les exposants sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions.

— Les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et soustractions.

Donc, on fait le contenu des parenthèses avant le reste et on travaille dans l'ordre :

1. puissances
2. multiplications et divisions
3. additions et soustractions

Exemple : $(3.2-1)\sqrt{3+6} + 4^2.6 - 1 = 110$

2 Intervalle, ensemble et coordonnées

Ne pas confondre...

$(a; b)$	représente les **coordonnées** d'un point du plan (a est l'abscisse, b est l'ordonnée)
$[a; b]$	représente un **intervalle**, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs comprises entre a et b inclus
$\{a; b\}$	représente un **ensemble** contenant les points a et b uniquement

Ne pas confondre non plus...

$[a; b]$	contient toutes les valeurs entre a et b, **incluant** a et b
$]a; b[$	contient toutes les valeurs entre a et b, **sans inclure** a et b
$]a; b]$	contient toutes les valeurs entre a et b, **incluant** b
$[a; b[$	contient toutes les valeurs entre a et b, **incluant** a
$\leftarrow; b]$	contient toutes les valeurs **inférieures ou égales** à b
$\leftarrow; b[$	contient toutes les valeurs **inférieures** à b
$[a; \rightarrow$	contient toutes les valeurs **supérieures ou égales** à a
$]a; \rightarrow$	contient toutes les valeurs **supérieures** à a
$\mathbb{R}$	contient toutes les valeurs réelles
$\mathbb{R}_0$	contient toutes les valeurs réelles, **sauf** 0
$\mathbb{R}^+$	contient toutes les valeurs réelles **positives**
$\mathbb{R}^-$	contient toutes les valeurs réelles **négatives**

3 Équations et inéquations

3.1 Équations du premier degré

Une équation du premier degré est une équation du type

$$ax + b = 0$$

Pour résoudre une telle équation, il suffit d'isoler la variable : $x = \dfrac{-b}{a}$.

Exemples :

1. $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$
   Solution : $\left\{\frac{-1}{3}\right\}$
2. $3x + 1 = 10 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{3} = 3$
   Solution : $\{3\}$
3. $3x + 1 = 2x \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
   Solution : $\{-1\}$
4. $3x + 1 = 10 - x \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{4}$
   Solution : $\left\{\frac{-9}{4}\right\}$

3.2 Inéquations du premier degré

Une inéquation du premier degré est une inéquation du type

$$ax + b \geq 0$$

Pour résoudre une telle inéquation, il suffit d'isoler la variable x.
Attention ! Diviser ou multiplier par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

1. $3x + 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{3}$
   Solution : $\leftarrow; \frac{-1}{3}[$
2. $-3x + 1 \geq 10 \Leftrightarrow -3x \geq 9 \Leftrightarrow x \leq -3$
   Solution : $\leftarrow; -3]$
3. $3x + 1 > 2x \Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
   Solution : $[-1; \rightarrow$
4. $3x + 1 \geq 10 - x \Leftrightarrow 4x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{-9}{4}$
   Solution : $[\frac{-9}{4}; \rightarrow$

3.2.1 Rappels sur la factorisation

Second degré - Méthode du discriminant

1. Réécrire l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. • Si $\Delta > 0$, poser $\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
   Alors, $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalent à $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

   • Si $\Delta = 0$, poser $x_1 = \frac{-b}{2a}$
   Alors, $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalent à $(x - x_1)^2 = 0$

   • Si $\Delta < 0$, l'équation n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Degrés supérieurs - Méthode d'Horner

Pour une équation de degré 3, sur l'exemple $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$.

1. Trouver, par essais/erreurs, un x_1 qui vérifie l'équation. Ici, $x_1 = -1$ fonctionne.
2. Construire un tableau dont la première ligne reprend les coefficients devant les puissances de x et dont le x_1 est repris dans la première colonne comme ceci :

	1	6	11	6
-1				

3. Descendre le coefficient du x^3 sur la troisième ligne, le multiplier par x_1 et écrire le résultat sous le coefficient du x^2. Additionner ces deux valeurs et écrire le résultat en bas de la troisième colonne.

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$			
	1			

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$	-1		
	1			

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$	-1		
	1	5		

4. Faire la même démarche avec les autres coefficients (multiplier par le x_1 et additionner par colonne).

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$	-1	-5	
	1	5		

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$	-1	-5	
	1	5	6	

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$	-1	-5	-6
	1	5	6	

	1	6	11	6
-1	$\downarrow$	-1	-5	-6
	1	5	6	0

5. Utiliser le x_1 et les coefficients de la dernière ligne pour écrire la factorisation ci-dessous.

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - (-1)).(x^2 + 5x + 6) = 0$$

6. Factoriser le facteur du second degré par la méthode du discriminant (voir plus haut) et obtenir

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1).(x + 3)(x + 2) = 0$$

3.3 Équations de degrés supérieurs à 1

Une équation de degré n est une équation du type

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Pour résoudre une telle équation, il suffit de factoriser l'expression et d'utiliser la règle du produit nul.

Exemples :

1. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1).(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$
   Solution : $\{-1; 1\}$
2. $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$
   Solution : $\{-1\}$
3. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \\ x=-1 \end{cases}$
   Solution : $\{-3; -2; -1\}$

3.4 Inéquations de degrés supérieurs à 1

Une équation de degré n est une équation du type

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \leq 0$$

Pour résoudre une telle inéquation, il faut impérativement faire un **tableau de signes**.

Exemples :

1. $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x+1).(x-1) < 0$
   Or, $x^2 - 1$ s'annule en $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$, d'où

x		-1		1	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

   Solution : $]-1; 1[$

2. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow$
   Or, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ s'annule en $\begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \\ x=-1 \end{cases}$,
   d'où

x		-3		-2		-1	
$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	-	0	+	0	-	0	+

   Solution : $[-3; -2] \cup [-1; \rightarrow$

3.5 Systèmes d'équations

3.5.1 Méthode de substitution

Prenons le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Pour résoudre ce système par la méthode de **substitution** :

- on isole x dans l'équation (1), donc $x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$(3)
- on remplace x par (3) dans l'équation (2) pour obtenir une équation ne dépendant plus que de y
- on trouve la valeur de y dans l'équation (2)
- on trouve la valeur de x par l'égalité (3)

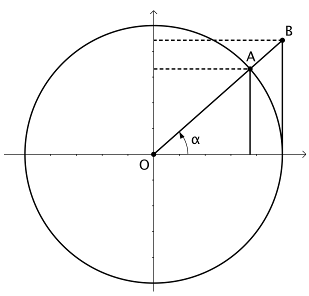
Exemple : $\begin{cases} x + 3y = 5 & (1) \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$

Par (1) : $x = 5 - 3y$ (3)
Dans (2) : $2(5 - 3y) - y = 3$, ou $10 - 6y - y = 3$, ou encore $7 = -7y$, ou enfin $y = -1$
Par (3) : $x = 5 - 3(-1) = 5 + 3 = 8$
Solution : $\{(8; -1)\}$

4 Trigonométrie

Un **angle orienté** est un angle possédant une demi-droite origine et une demi-droite extrémité. Un angle orienté est **positif** s'il est orienté dans le sens antihorloger (sens inverse des aiguilles d'une montre), et négatif s'il est orienté dans le sens horloger.

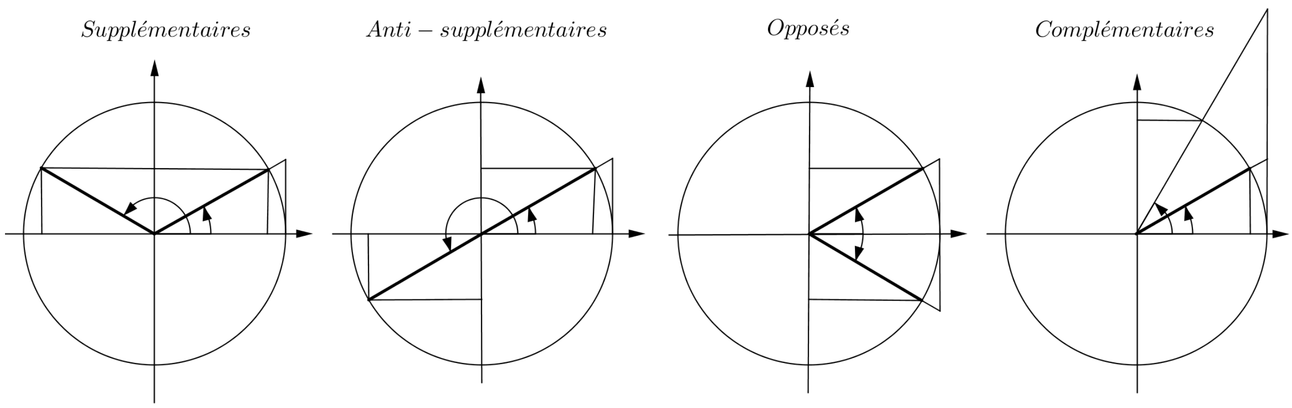
On représente les angles orientés dans le **cercle trigonométrique**, c'est-à-dire
un cercle de rayon 1, centré à l'origine d'un repère orthonormé et orienté positivement (dans le sens antihorloger).



Un point sur le cercle trigonométrique détermine toujours un angle orienté.
Dans le cercle ci-dessus, le point A détermine l'angle α.
Le **cosinus** de α correspond à l'abscisse du point A.
Le **sinus** de α correspond à l'ordonnée du point A.
La **tangente** de α correspond à l'ordonnée du point d'intersection entre la droite OA et la droite d'équation $x = 1$. C'est donc l'ordonnée du point B.

4.1 Angles associés

	Sinus	**Cosinus**	**Tangente**
Supplémentaires	même	opposés	opposés
Anti-Supplémentaires	opposés	opposés	même
Opposés	opposés	même	opposés
Complémentaires	cosinus de l'autre	sinus de l'autre	cotangente de l'autre



Plusieurs angles peuvent donc avoir le même sinus, le même cosinus ou la même tangente !