Dimensions, géométrie et unités

1 Tableau des préfixes

Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole	Facteur
peta	P	10^{15}	déci	d	10^{-1}
tera	T	10^{12}	centi	c	10^{-2}
giga	G	10^{9}	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^{6}	micro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^{3}	nano	n	10^{-9}
hecto	h	10^{2}	pico	p	10^{-12}
déca	da	10^{1}	femto	f	10^{-15}

2 Changements d'unités

Pour changer les unités dans lesquelles on exprime une grandeur, on transforme les unités présentes en celles que l'on veut obtenir en utilisant les puissances de 10. Ceci est aussi vrai lorsqu'il s'agit d'unités de volume ou de surface.

Par exemple, si l'on dispose d'un volume de 500 cm^3 que l'on souhaite transformer en km^3 :

$$\begin{aligned} 500\ \text{cm}^3 &= 500\ (10^{-2}\ \text{m})^3 = 500\ (10^{-2} \times 10^{-3}\ \text{km})^3 = 500\ (10^{-5}\ \text{km})^3 = 500\ \left(10^{-5}\right)^3\ \text{km}^3 \\ &= 500 \times 10^{-15}\ \text{km}^3 = 5 \times 10^{-13}\ \text{km}^3 \end{aligned}$$

3 Mise à l'échelle

On dispose d'un plan à l'échelle 1/250 000. Sachant que deux villes sont distantes de 30 km, quelle est la distance entre ces deux villes sur la carte ?

Résolution par règle de 3

$$1\ \text{cm sur la carte} \quad \leftrightarrow \quad 250\,000\ \text{cm dans la réalité}$$

On convertit les cm en km pour les distances dans la réalité :

250 000 cm = 250 000×10^{-2} m = 250 000×10^{-2} × 10^{-3} km = 250 000×10^{-5} km = 2,5 km

Ce qui donne :

$$\begin{array}{cccl}
1 & \text{cm sur la carte} & \leftrightarrow & 2{,}5 \quad \text{km dans la réalité} \\
\frac{1}{2{,}5} & \text{cm sur la carte} & \leftrightarrow & 1 \quad \text{km dans la réalité} \\
\frac{30}{2{,}5} & \text{cm sur la carte} & \leftrightarrow & 30 \quad \text{km dans la réalité}
\end{array}$$

Les deux villes sur la carte sont distantes de $\frac{30}{2,5} = 12$ cm.

Résolution par égalité de fractions

L'échelle 1/250 000 donne le rapport (donc le quotient) entre la distance sur la carte d_C et la distance dans la réalité d_R, avec la plus petite distance au numérateur et la plus grande au dénominateur :

$$\frac{1}{250000} = \frac{d_C}{d_R}$$

Sachant que $d_R = 30$ km, on obtient d_C en km :

$$d_C = \frac{1}{250000}.d_R = \frac{1}{250000}.30 = 12 \times 10^{-5}$$

On convertit cette fois les km en cm :

12×10^{-5} km = $12 \times 10^{-5} \times 10^{3}$ m = $12 \times 10^{-5} \times 10^{3} \times 10^{2}$ cm = $12 \times 10^{-5} \times 10^{5}$ cm = 12 cm

Les deux villes sur la carte sont distantes de 12 cm.

4 Unités dans les équations

Dans une équation, les unités doivent être les mêmes de part et d'autre du signe d'égalité. On détermine souvent les unités des coefficients en fonction des équations où ils interviennent. Par exemple pour la constante de gravitation G :

$$\begin{array}{ccc}
F_G & = & G\frac{m_1 m_2}{r^2} \\
 & \text{unités :} & \\
[N] & = & [?]\,\frac{[kg]\,[kg]}{[m^2]}
\end{array}$$

On en déduit que les unités de G sont des N.m^{2}kg^{-2}.

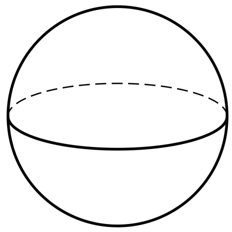
On peut aussi aller plus loin en utilisant le fait que, par définition, $F = ma$ et 1 N équivaut à 1 kg.m.s^{-2} ; alors, G peut s'exprimer également en

$$\begin{aligned}
N\frac{m^2}{kg^2} &= \frac{kg.m}{s^2}\frac{m^2}{kg^2} \\
&= \frac{m^3}{s^2 kg}
\end{aligned}$$

Dans l'usage habituel, on garde les N.m^{2}kg^{-2}.

5 Un peu de géométrie et de trigonométrie

Géométrie

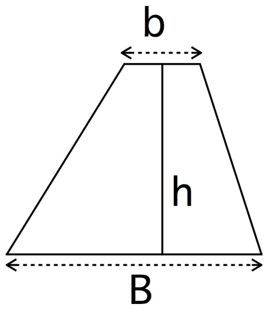


circonférence d'un cercle $2\pi R$

surface d'un disque πR^2

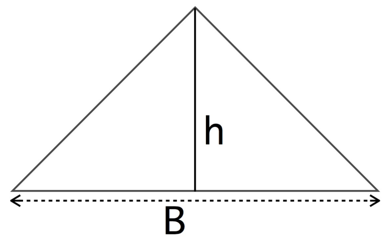
surface d'une sphère $4\pi R^2$

volume d'une sphère $\frac{4}{3}\pi R^3$



surface d'un trapèze $= \dfrac{(B+b)\times h}{2}$

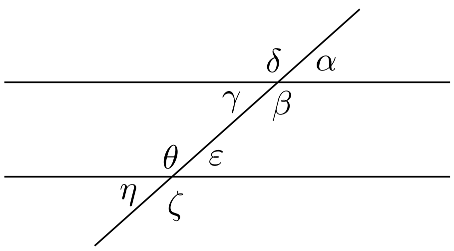
somme des angles d'un quadrilatère = 360°



surface d'un triangle $= \dfrac{B\times h}{2}$

somme des angles d'un triangle = 180°

Angles



angles correspondants $\alpha = \varepsilon$ et $\delta = \theta$ etc

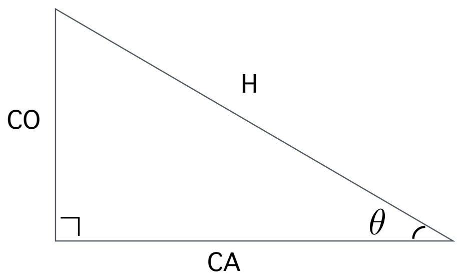
angles alternes-internes $\gamma = \varepsilon$ et $\beta = \theta$

angles alternes-externes $\alpha = \eta$ et $\delta = \zeta$

angles opposés $\alpha = \gamma$ et $\delta = \beta$ etc

angles supplémentaires $\alpha + \beta = 180°$ et $\theta + \varepsilon = 180°$ etc

Trigonométrie dans le triangle rectangle



Pythagore

$\mathrm{H}^2 = \mathrm{CO}^2 + \mathrm{CA}^2$

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{H}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{H}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$$

6 Exercices

Exercice 1

Sur un plan d'orientation à l'échelle 1/75 000, deux points d'intérêt sont séparés par une distance de 7,2 cm. Quelle est la distance qui les sépare dans la réalité ?

Exercice 2

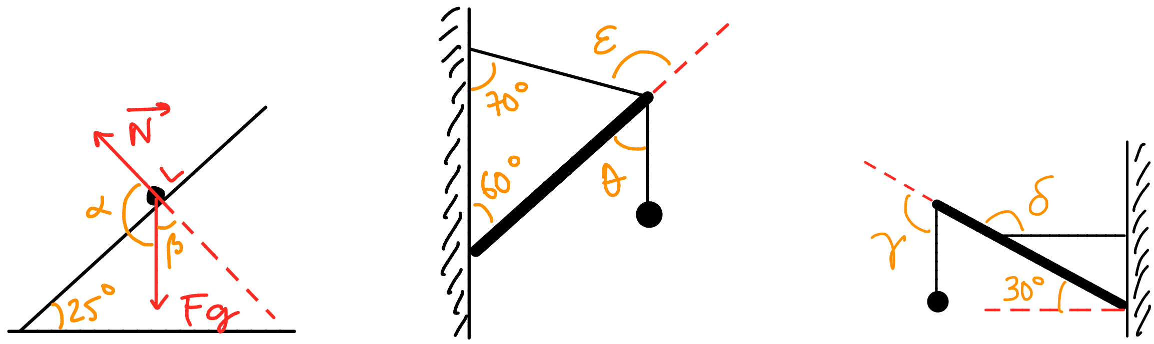
Une maquette à l'échelle du Titanic a une longueur de 38,4 cm. Sachant qu'en réalité le célèbre paquebot mesure 269 m de long, à quelle échelle a-t-il été reproduit ?

Exercice 3

La distance réelle entre deux villes est de 60 km. Quelle est la distance qui les sépare, en dm, sur une carte à l'échelle 1/250 000 ?

Exercice 4

Trouver la valeur des angles indiqués dans les schémas suivants.



(a) (b) (c)

Exercice 5

La différence de potentiel U aux bornes d'une résistance R parcourue par un courant I vaut $U = RI$. Les unités du système international pour U, R et I sont respectivement le volt (V), l'ampère (A) et l'ohm (Ω).

a. Si $R = 0,5$ kΩ et $I = 40$ mA, que vaut U en V ?

b. Si $R = 1$ MΩ et $I = 500$ nA, que vaut U en V ?

c. Si $U = 12$ V et $I = 50$ mA, que vaut R en Ω ?

Exercice 6

Un condensateur a une capacité surfacique de 9,83 mF/m^2. Que vaut-t-elle en F/cm^2 ?

Exercice 7

a. Un mobile se déplace à une vitesse de 5 mètres par seconde. Exprimez la vitesse en kilomètres par heure.

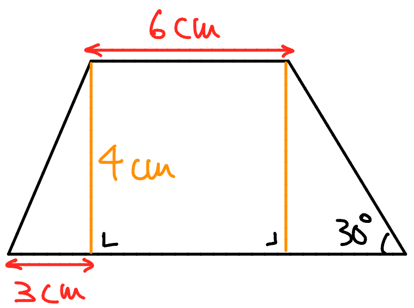
b. Un mobile se déplace à une vitesse de 90 kilomètres par heure. Exprimez la vitesse en mètres par seconde.

c. Combien y a-t-il de secondes dans une journée de 24 heures ?

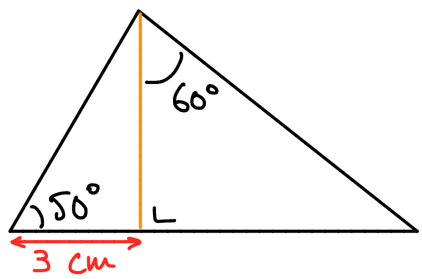
d. Combien d'heures représente une durée de 1000 s ? Et combien de minutes ?

Exercice 8

Calculer l'aire des figures suivantes et déterminer la longueur de chacun de leurs côtés.



(a)



(b)

Exercice 9

Lorsqu'un courant I traverse une résistance R, la puissance dissipée est donnée par $P = RI^2$. Les unités du système international pour P, R et I sont respectivement le watt (W), l'ohm (Ω) et l'ampère (A).

a. Si $R = 2,2$ kΩ et $I = 20$ mA, que vaut P en mW ?

b. Si $P = 800$ W et $R = 500$ kΩ, que vaut I en mA ?

Exercice 10

Une sphère a un rayon de 0,35 m. Quelle est son volume en m^3 et en dm^3 ?

Solutions

Exercice 1
5,4 km

Exercice 2
1/700

Exercice 3
2,4 dm

Exercice 4

a. $\alpha = 155°$ et $\beta = 25°$

b. $\theta = 60°$ et $\varepsilon = 130°$

c. $\gamma = 120°$ et $\delta = 150°$

Exercice 5

a. 20 V

b. 0,5 V

c. 240 Ω

Exercice 6
$9,83 \times 10^{-7}$ F/cm^2

Exercice 7

a. 18 km/h

b. 25 m/s

c. 86 400 s

d. 1000 s = 0,278 h = 16,7 min

Exercice 8

a. $A = 43,8$ cm^2 et les côtés mesurent 5 cm, 6 cm, 8 cm et 15,9 cm.

b. $A = 16,4$ cm^2 et les côtés mesurent 4,7 cm, 7,2 cm et 9,2 cm.

Exercice 9

a. 0,88 W

b. 40 mA

Exercice 10
$V = 0,18$ m$^3 = 180$ dm^3